Exercice 2 **1)** Soit $x \in A+B$. Alors il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $x = a+b$. De plus, (comme $\sup A$ est un majorant de A et idem pour $\sup B$ avec B) :

$$a \leq \sup A \qquad \text{et} \qquad b \leq \sup B$$

Ainsi,

$$x \leq \sup A + \sup B$$

Par arbitraire sur x, $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$, qui est donc majorée.

Par ailleurs, cette preuve montre que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A+B$. Posons désormais pour plus de clarté

$$M := \sup A + \sup B \qquad M_A := \sup A \qquad M_B := \sup B$$

Pour obtenir que $\sup(A+B) = M$, il suffit donc de montrer que (j'ai mis δ au lieu de ε, on va voir pourquoi ensuite)

$$\forall \delta > 0 \qquad \exists x \in A+B \qquad x > M - \delta$$

Soit donc $\delta > 0$.

- (On utilise la définition de la borne supérieure avec $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$) Comme $M_A = \sup A$, il existe $a \in A$ tel que

$$a > M_A - \frac{\delta}{2}$$

- De même, il existe $b \in B$ tel que

$$b > M_B - \frac{\delta}{2}$$

Alors, en additionnant,

$$a + b > M_A + M_B - \delta$$

autrement dit, en posant $x = a+b$, on a montré que

$$\exists x \in A+B \qquad x > M - \delta$$

Comme on a vu que M est un majorant de $A+B$, on en déduit que

$$\sup(A+B) = M = \sup A + \sup B$$

2) Réponse en bas de la page suivante :

Réponse : $\sup |A| = \max(|\sup A|, |\inf A|)$. Ce n'est pas juste $|\sup A|$, comme le montre le contre-exemple $A = [-2, 0]$, pour lequel $|A| = [0, 2]$.

Exercice 13

Si (u_n) est stationnaire, elle est constante à partir d'un certain rang donc elle converge. *On notera que cette implication n'utilise pas l'hypothèse que (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, elle est vraie pour toute suite.*

Réciproquement, supposons que (u_n) est convergente. On note $\ell = \lim u_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \qquad \text{càd} \qquad u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Alors pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in A \qquad \text{avec} \qquad A := \left[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$$

Or, l'intervalle $\left[\ell - \frac{1}{3}, \ell + \frac{1}{3}\right]$ a pour largeur $\frac{2}{3}$, donc il contient au plus un entier. Ainsi, l'ensemble A contient au plus un élément. Mais comme il contient (par exemple) u_N, alors A contient au moins un élément. On en déduit que A est un singleton : $A = \{p\}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in \{p\} \qquad \text{donc} \qquad u_n = p$$

Finalement, u_n est stationnaire. *On peut alors en déduire qu'en fait $\ell = p$ par un passage à la limite. En particulier $\ell \in \mathbb{Z}$. Mais ce n'est pas demandé !*

Note : la valeur $\varepsilon = \frac{1}{3}$ n'est pas la seule qui fonctionne. Toute valeur $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ fonctionne également. Le point clé est que l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contienne au plus un entier. Par contre pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ce n'est plus aussi simple car par exemple si $\ell = \frac{3}{2}$ l'intervalle

$$[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] = [1, 2]$$

contient justement deux entiers. En pratique, cela n'est pas possible car $\ell \in \mathbb{Z}$. Mais justement à ce stade de la démonstration on ne sait pas que $\ell \in \mathbb{Z}$ et aucun théorème ne permet de le justifier. Donc il faut abolument prendre $\varepsilon < \frac{1}{2}$.